fonction réciproque

La question : montrer que $f(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha \in [a,b]$? passe par 3 étapes :

Q_1 - bijection de I sur $f(I) = J$

Q_2 - $0 \in f(I) = J$ donc 0 admet un seul antécédent ...

Q_3 - $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow$ TVI

Exemple :

soit le tableau de variation suivant :

Q_1 : Mq f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = J$?

Mq f admet une fonction réciproque ?

f est continue et strictement croissante sur $]-\infty,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur $f(]-\infty,+\infty[) =]-2,+\infty[= J$

Q_2 : Mq $f(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha \in]-\infty,+\infty[$?

$0 \in]-2,+\infty[$ donc 0 admet un seul antécédent $\alpha \in]-\infty,+\infty[$; donc $f(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha \in]-\infty,+\infty[$.

Q_3 : Mq $a \leq \alpha \leq b$? ou $\alpha \in [a,b]$?

on calcul $f(a)$ et $f(b)$, on doit trouver une valeur positive et une autre négative

donc $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow$ d'après le Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) $\alpha \in [a,b]$.

Quelque opérations sur la fonction réciproque f^{-1} :

* $f(2) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 2$

Q_1 : Mq f^{-1} est dérivable et calculer $(f^{-1})'(x_0)$?

f est dérivable sur I et $f' \neq 0$ sur I $\Rightarrow f^{-1}$ est dérivable sur J

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$

Q_2 : Tracer la courbe de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$?

$\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est symétrique à $\mathcal{C}_f$ selon la droite $D : y = x$

$\mathcal{C}_{f^{-1}} = S_D(\mathcal{C}_f)$

donc

$\mathcal{C}_f$	$\mathcal{C}_{f^{-1}}$
$M(x_0, y_0)$	$M'(y_0, x_0)$
tg horizontale	tg verticale
tg verticale	tg horizontale

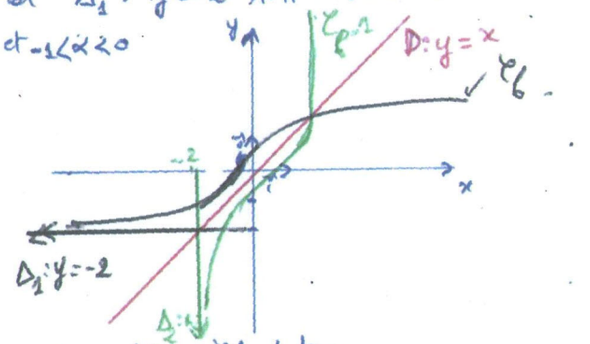
Exemple : reprenons le tableau précédent

et soit $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

donc on a une B.P de dir $(0,\vec{i})$ au $\mathcal{V}(+\infty)$

et $\Delta_1 : y = -2$ A.H au $\mathcal{V}(-\infty)$.

et $-2 < \alpha < 0$



pour tracer $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ il faut tracer :

→ la droite $D : y = x$

→ $\Delta_1 : y = -2$ devient $\Delta_1' : x = -2$

→ B.P de dir $(0,\vec{i})$ devient B.P de dir $(0,\vec{j})$

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn